Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 31 Ocak 2022	

Süre 75dk. Her soru 25 puandır.

d'Alambert çözümü: $u(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$

1. $u_{xy} = 2u_x + 2e^{x+3y}$ denkleminin genel çözümünü elde edin.

Çözüm: Özel çözüm: $u_p = Ae^{x+3y}$. Denklemde yerine koyarsak: $3A = 2A+2$, $A = 2$.

Homojen denklemin çözümü: $(D_{xy} - 2D_x)u_h = (D_y - 2)D_x u_h = 0$

$D_x u_h = u_1$, $(D_y - 2)u_1 = 0$.

$u_1 = e^{2y}h(x)$.

$u_h = e^{2y}f(x) + g(y)$. (Burada $f(x) = \int h(x)dx$ keyfi bir fonksiyondur.)

$u = u_p + u_h = e^{2y}f(x) + g(y) + 2e^{x+3y}$

2.

$$u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0, \qquad x \neq 0$$

denklemini sınıflandırın ve kanonik forma dönüştürün.

Çözüm: $B^2 - AC = x^2 > 0$, denklem hiperboliktir.

$\lambda^2 - x^2 = 0$, $\lambda = \pm x$, $\frac{dy}{dx} = \pm x$

$\xi = y - \frac{x^2}{2}$, $\eta = y + \frac{x^2}{2}$.

$u_{xx} = u_\eta - u_\xi + x^2(-u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta})$

$u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}$.

$x^2 = \eta - \xi$ olur.

Denklemin kanonik formu: $u_\eta - u_\xi - 4(\eta - \xi)u_{\xi\eta} = 0$.

3.

$$u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = e^{2x}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = x - e^{2x}, \quad u_t(x,0) = 1$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: Özel çözüm: $u_p = Ae^{2x}$.

$$-\frac{1}{4}4A = 1 \implies A = -1.$$

$w = u - u_p$

$$w_{tt} - \frac{1}{4} w_{xx} = 0, \qquad w(x,0) = u(x,0) - u_p(x,0) = x, \qquad w_t(x,0) = u_t(x,0) - \frac{\partial u_p}{\partial t}(x,0) = 1.$$

d'Alambert

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+ct) + (x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 1 \, d\xi = x + t$$

$u(x,t) = x + t - e^{2x}$

4.

$$\begin{aligned} &u_t - 2t u_{xx} = 0, && (t > 0, 0 < x < \pi), \\ &u(x,0) = \sin x - 2\sin 2x, && (0 \le x \le \pi), \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, && (t \ge 0) \end{aligned} \tag{1}$$

başlangıç sınır değer problemini **değişkenlerin ayrıştırılması (Fourier) yöntemiyle** çözün.

Çözüm: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

$$T'(t)X(x) - 2tX''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{T'}{2tT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0$$

Derste

$$X_n(x) = \sin nx, \qquad \lambda_n = n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

olduğunu görmüştük.

$$T'(t) = -2n^2 t T(t) \implies \frac{dT}{T} = -2n^2 t\, dt \implies \ln T = -n^2 t^2 + C \implies T = Ce^{-n^2 t^2}.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) e^{-n^2 t^2}$$

$$\sin x - 2\sin 2x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -2, \qquad A_n = 0, n \ge 3.$$

$$u(x,t) = e^{-t^2} \sin x - 2e^{-4t^2} \sin 2x$$